

Projet AM25:

Analyse dynamique de la tour Taipei 101

Partie I : Modèle de poutre, méthode de Ritz



Adama THIAM
Mounia BELLAHCEN
Clément BALCON

Table des matières:

Introduction:	2
I. Construction d'un modèle dynamique simplifié à 4 ddl	2
A. Fonctions d'approximation	2
B. Détermination de la matrice Masse	3
C. Détermination de La matrice de Rigidité	5
D. Calcul des modes propres des fréquences propres	6
III. Modélisation de l'absorbeur passif de vibrations	9
IV. Modélisation dynamique simplifié de la flexion transversale de la tour avec l'absorbeur passif	10
A. Détermination de la matrice Masse	10
B. Détermination de la matrice de Rigidité	11
C. Calcul des modes propres	11
V. Evaluation de l'influence de l'absorbeur	11
Conclusion:	12
Bibliographie	13

Introduction:

Ce rapport constitue le premier livrable dans le cadre de la modélisation numérique au niveau 2, portant sur l'analyse du comportement dynamique de la tour Taipei 101, emblème architectural de Taïwan. Avec ses 509,2 mètres de hauteur, elle figure parmi les plus hauts gratte-ciel au monde. Implantée dans une zone sujette aux séismes et aux typhons, sa conception structurelle a été pensée pour répondre efficacement à ces aléas naturels. Pour cela, un dispositif d'absorption passive des vibrations, constitué d'un immense pendule suspendu sur quatre niveaux, a été intégré afin de stabiliser l'édifice en cas de fortes sollicitations.

Dans un premier temps, nous avons élaboré une modélisation simplifiée de la tour, servant de base à l'analyse dynamique. Cette approche nous a permis, grâce à la méthode de Rayleigh-Ritz, de calculer les fréquences propres ainsi que les modes de déformation associés. Par la suite, l'introduction d'un absorbeur passif dans le modèle a rendu possible l'évaluation de son influence sur les caractéristiques vibratoires de la structure, notamment les fréquences propres et les formes modales.

I. Construction d'un modèle dynamique simplifié à 4 ddl

A. Fonctions d'approximation

Afin de modéliser le déplacement horizontal $u(x)$ de la tour Taipei 101 selon l'axe \vec{x} , la structure est assimilée à une poutre verticale encastree à sa base et libre à son extrémité supérieure. Dans ce cadre, la déformée de la poutre peut être exprimée comme une combinaison linéaire de fonctions d'approximation dites fonctions de Ritz :

$$u(z) = \sum_{i=1}^4 q_i \psi_i(z)$$

où q_i représente les coordonnées généralisées associées à chaque fonction de forme $\psi_i(z)$.

Les fonctions $\psi_i(z)$ sont choisies pour respecter les conditions aux limites d'une poutre encastree-libre :

$$u(0) = 0; \frac{du}{dz}(0) = 0; \frac{d^2u}{dz^2}(0) = 0; \frac{d^3u}{dz^3}(0) = 0$$

Ces conditions garantissent un déplacement nul et une rotation nulle à la base (encastrement parfait), ainsi qu'un moment et un effort tranchant nuls en tête (extrémité libre).

Elles sont définies par la relation :

$$\psi_i(z) = \cosh(k_i \frac{z}{H}) - \cos(k_i \frac{z}{H}) - C_i [\sinh(k_i \frac{z}{H}) - \sin(k_i \frac{z}{H})]$$

$$\text{avec } C_i = \frac{\sinh(k_i) - \sin(k_i)}{\cosh(k_i) - \cos(k_i)}$$

avec $k_1 = 1.876$; $k_2 = 4.695$; $k_3 = 7.855$; $k_4 = 10.996$ [1].

Ces quatre fonctions représentent les modes de flexion de la tour. Elles ont été tracées à l'aide de MATLAB afin de visualiser la forme des déformées modales:

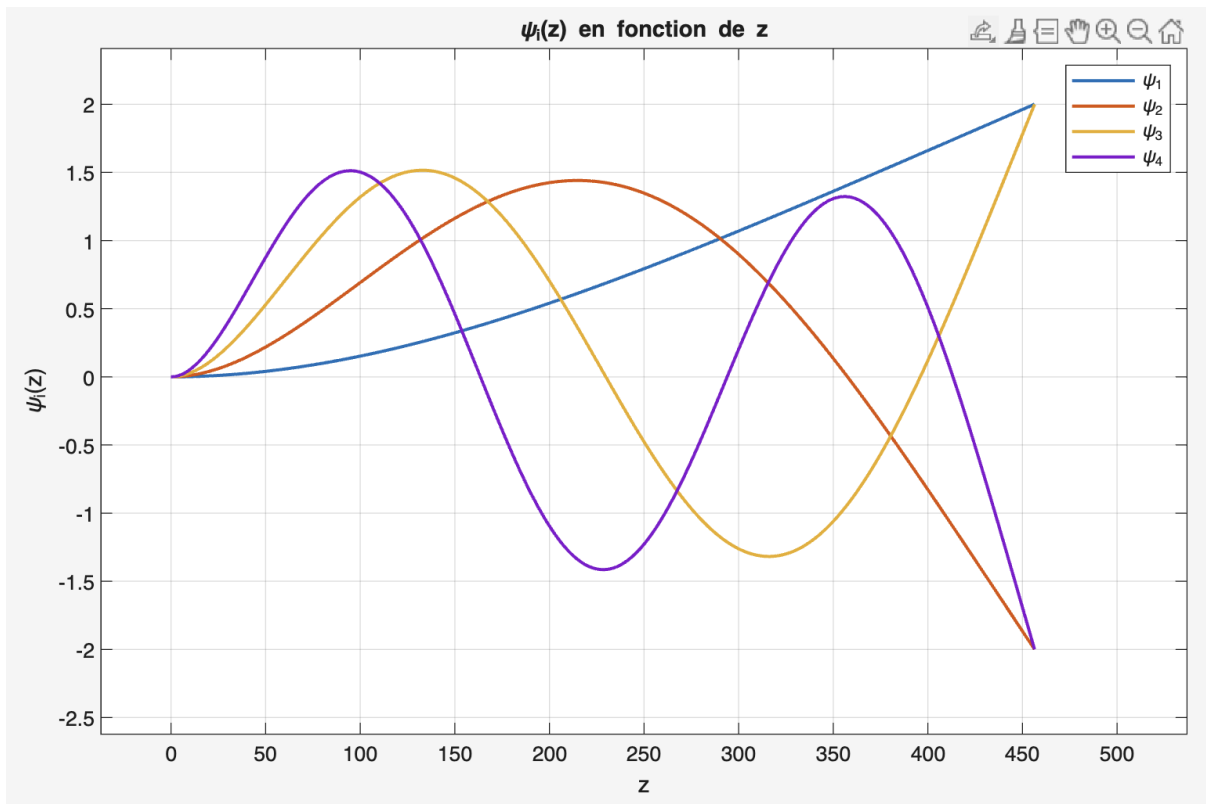


Figure 1: Fonctions de forme

B. Détermination de la matrice Masse

La tour est modélisée comme une poutre encastree à la base et libre en tête. Dans le cadre de l'approximation de Ritz, le déplacement horizontal est projeté sur les quatre fonctions $\psi_i(z)$ retenues en I.A.

La matrice de masse généralisée s'écrit alors comme la somme de trois contributions physiques évaluées étage par étage :

$$M_{globale} = 4 * (M_{poutre} + M_{plancher} + M_{rotation-plancher})$$

avec

$$M_{poutre} = \sum_{i=0}^{101} \int_{z_i}^{z_{i+1}} (\rho_{ca} S_{ca}(z_i) + (\rho_{cb} S_{cb}(z_i))) \psi(z) \psi(z)^T dz$$

$$M_{plancher} = \left(\sum_{i=0}^{101} \rho_{plancher} * Aire_{i-plancher} \right)$$

$$M_{rotation-plancher} = \sum_{i=0}^{101} J_i * \psi(z_i)\psi(z_i)^T$$

où :

$\rho_{cb} S_{cb}(z_i)$ correspond à la masse surfacique des colonnes de béton à l'étage i

$\rho_{ca} S_{ca}(z_i)$ correspond à la masse surfacique des colonnes d'acier à l'étage i

$\Psi(z) = [\psi_1(z), \psi_1(z), \psi_1(z), \psi_1(z)]$

$\rho_{plancher}$ la masse surfacique des planchers

$Aire_{i-plancher}$ l'aire de chaque plancher à l'étage i

J_i son moment d'inertie projeté dans le modèle

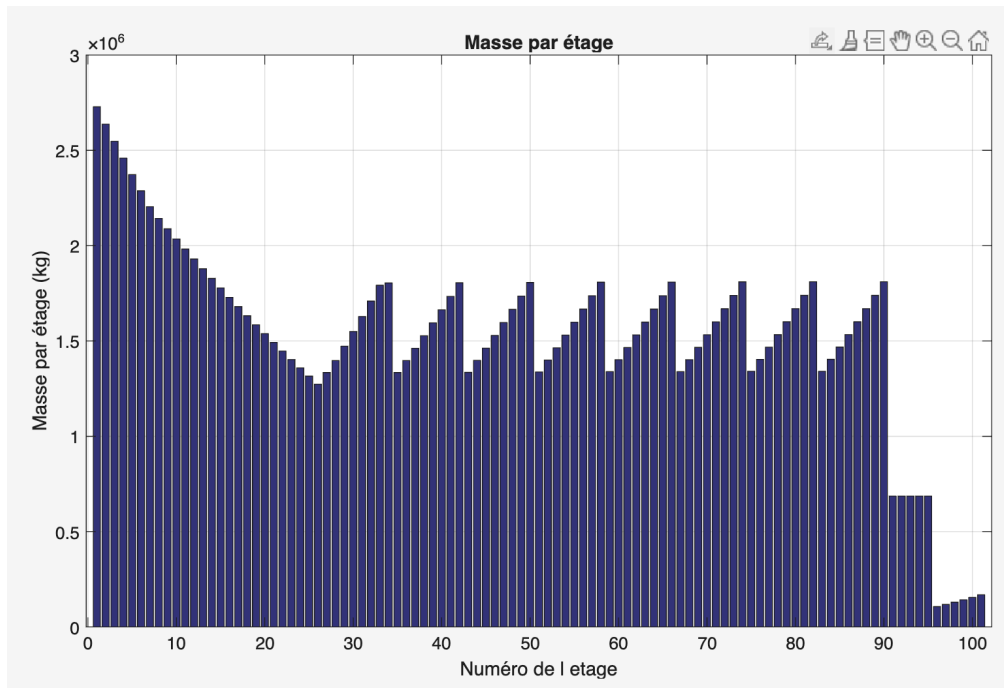
z_i la cote du plancher à l'étage i

Cette formule nous a permis d'obtenir numériquement la matrice de masse suivante :

Matrice de masse GLOBALE :
1.0e+08 *

0.8033	0.3205	-0.1324	0.1185
0.3205	1.1137	0.3618	-0.0209
-0.1324	0.3618	1.3154	0.4060
0.1185	-0.0209	0.4060	1.4213

Correspondant à une répartition de la masse globale de la tour en prenant en compte la masse de chaque étage calculé sur le Excel tel que :



→ 1/4 de l'étage à chaque fois

Figure 2: Masse concentrée équivalente des poutres et du plancher par étage

C. Détermination de La matrice de Rigidité

La matrice de rigidité de la tour Taipei 101 est déterminée à partir de l'approche énergétique, en s'appuyant sur le principe de l'énergie de déformation en flexion d'une poutre encastrée-libre.

On cherche donc une matrice K tel que :

$$K = \int_0^H EI \psi''(z) \psi''(z)^T dz$$

La tour est composée de colonnes mixtes acier-béton, dont la rigidité varie selon la hauteur.

On considère donc que le moment quadratique équivalent $E I(z)$ est discrétisé par étage, en additionnant la contribution :

$$EI_{total}(z) = EI_{béton}(z) + EI_{acier}(z)$$

Les valeurs de $EI_{béton}(z)$ et $EI_{acier}(z)$ sont données pour chaque étage (vecteurs de 101 valeurs).

Le calcul est réalisé étage par étage sur le domaine $[z_i, z_{i+1}]$, avec intégration numérique :

$$K_{étage}(i) = EI_{total}(z_i) \int_{z_i}^{z_{i+1}} \psi''(z) \psi''(z)^T dz$$

$$K_{globale} = \sum_{i=1}^{101} K_{étage}(i)$$

La matrice obtenue $K_{globale}$ est symétrique, positive définie et de dimension 4x4 tel que :

Matrice de rigidité globale (béton + acier) :
1.0e+10 *

0.0090	0.0205	0.0224	0.0135
0.0205	0.2209	0.2865	0.2038
0.0224	0.2865	1.4607	1.5487
0.0135	0.2038	1.5487	5.7982

Elle traduit le couplage entre les degrés de liberté généralisés (amplitudes des fonctions de Ritz). Les valeurs dominantes se trouvent sur la diagonale, représentant la rigidité principale associée à chaque mode de flexion. Ce résultat sera ensuite utilisé pour le calcul des modes propres et fréquences naturelles à la section suivante (I.D).

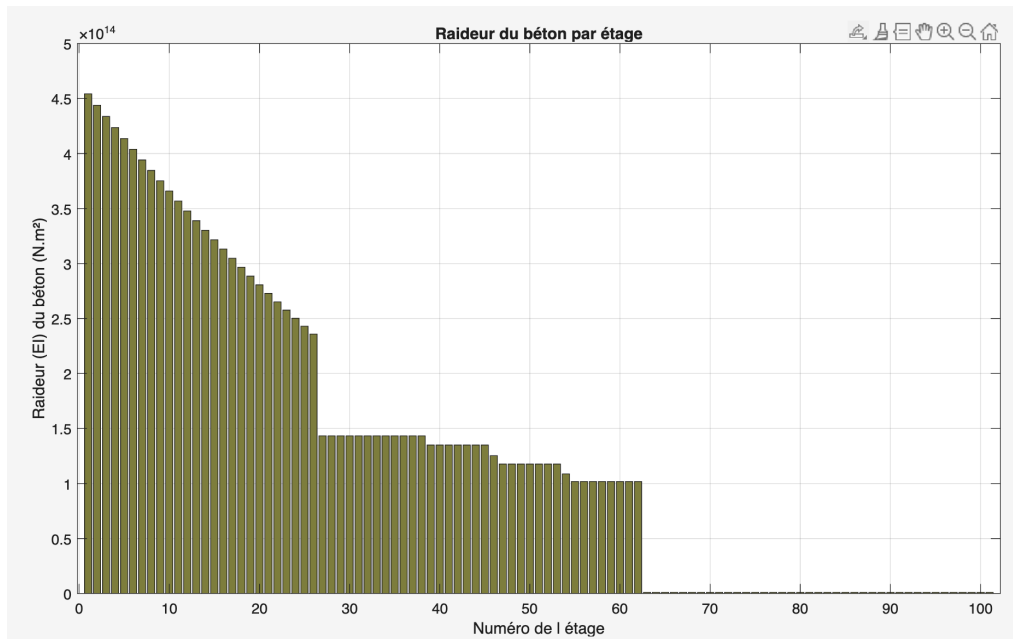


Figure 3 : : Produit E.I (Béton) en fonction des étages

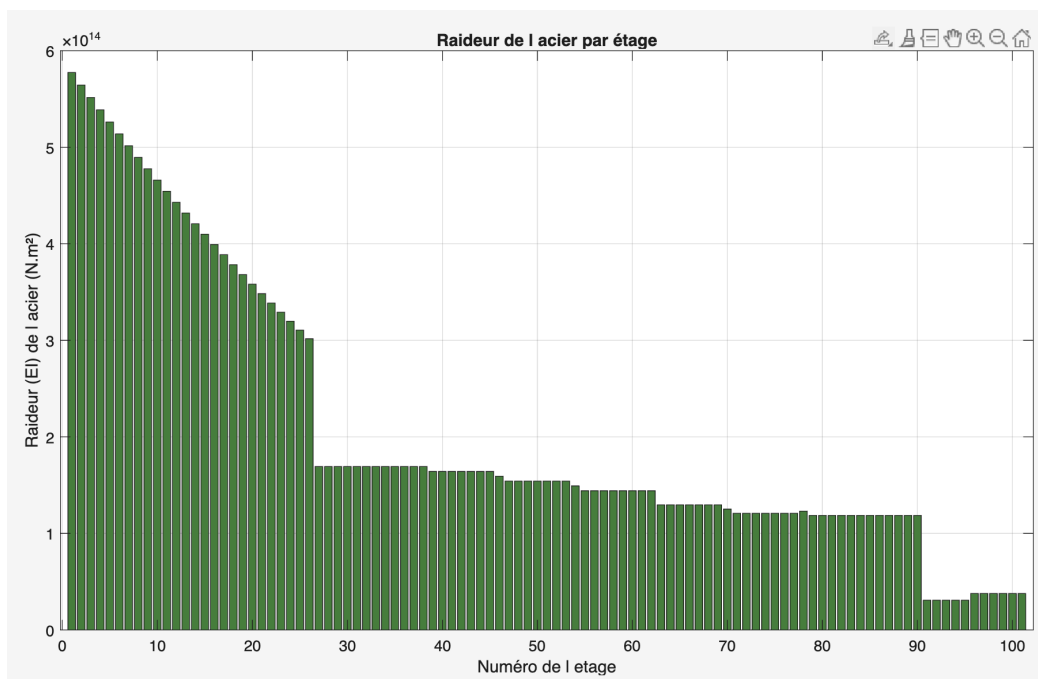


Figure 4 : Produit E.I (acier) en fonction des étages

D. Calcul des modes propres des fréquences propres

L'objectif de cette étape est de déterminer les caractéristiques vibratoires naturelles de la tour Taipei 101, c'est-à-dire les formes modales (modes propres) et leurs fréquences associées.

Ces grandeurs caractérisent la manière dont la structure entre en vibration sous une excitation (vent, séisme, etc.) et permettent d'évaluer son comportement dynamique global.

Dans le cadre de la méthode de Ritz, les déplacements horizontaux de la tour ont été exprimés sous la forme :

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^4 q_i(t) \psi_i(z)$$

où:

$\psi_i(z)$ sont les fonctions d'approximation décrites en section I.A,
 $q_i(t)$ sont les coordonnées généralisées dépendant du temps.

En appliquant le principe de conservation de l'énergie, on obtient l'équation du mouvement du système à 4 degrés de liberté :

$$M_{globale} \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + K_{globale} q(t) = 0$$

où:

$$q(t) = [q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t)]^T$$

On cherche donc des solutions harmoniques de la forme :

$$q(t) = \Phi e^{i\omega t}$$

Ce qui conduit au problème généralisé aux valeurs propres :

$$(K_{globale} - \omega^2 M_{globale}) \Phi = 0$$

Pour que ce système ait une solution non triviale $\Phi \neq 0$, il faut que :

$$\det(K_{globale} - \omega^2 M_{globale}) = 0$$

Les valeurs propres ω_i^2 correspondent aux pulsations naturelles (rad/s), et les vecteurs propres Φ_i représentent les modes de vibration.

Les valeurs propres donnent les pulsations naturelles ω_i et les fréquences correspondantes:

$$f = \frac{\omega_i}{2\pi}$$

Les vecteurs propres permettent de reconstituer la forme modale de chaque mode :

$$u_i(z) = \sum_{j=1}^4 \phi_{ij} \psi_j(z)$$

où ϕ_{ij} est le coefficient du mode i sur la fonction ψ_j

Les déformées modales sont calculées et normalisées pour visualiser les profils de flexion de la tour sur sa hauteur :

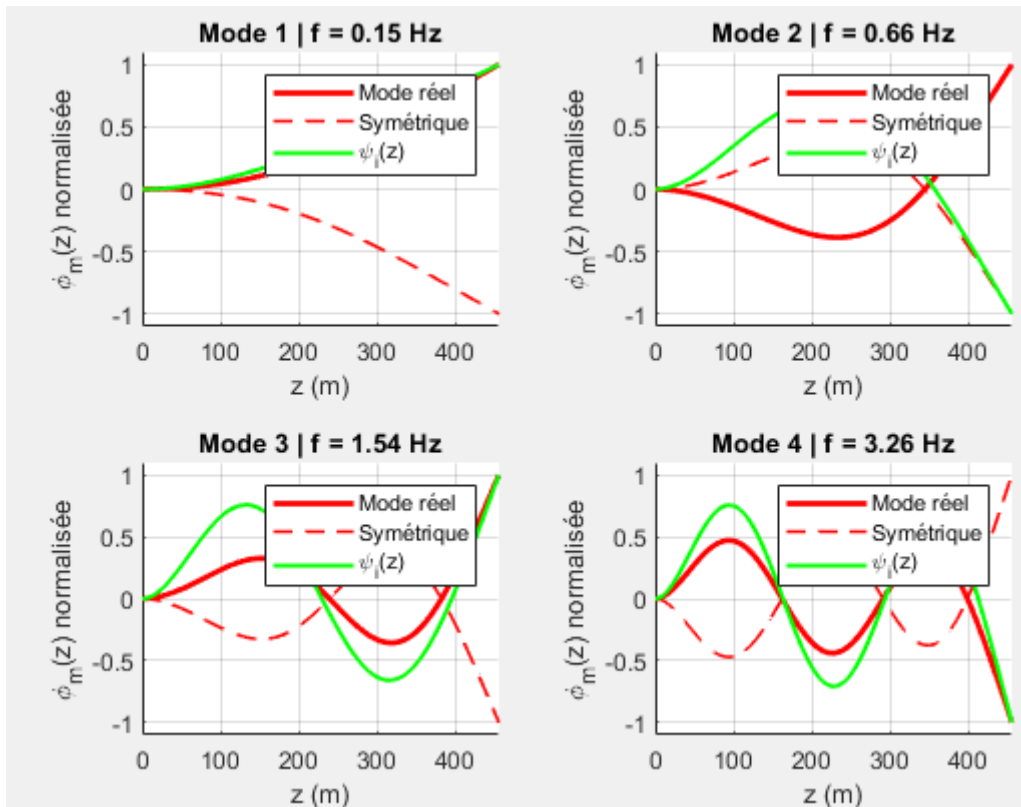


Figure 5 : Déformée modale de la tour

Analyse des résultats obtenus:

Selon l'article "Bulletin of the Seismological Society of America" [2], les trois fréquences modales en translations pour la tour de Taipei 101 (mesurée via enregistrements sismiques et techniques de vibration ambiante) sont :

$$f_1 = 0,15 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 0,43 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 0,78 \text{ Hz}$$

Le mode fondamental de translation est obtenu à $f_{1mod} = 0,15 \text{ Hz}$, en excellent accord avec la fréquence mesurée sur Taipei 101 ($f_{1mes} = 0,15 \text{ Hz}$).

Cet accord montre que la répartition globale masse-raidure du modèle (poutre encastree-libre + masses de planchers) est bien calibrée pour la flexion fondamentale.

Les modes supérieurs présentent des écarts plus sensibles (p. ex. f_2, f_3, f_4), ce qui est attendu au vu des simplifications (sectionnement par étages, absence de couplage torsion-flexion, encastrement parfait en base, etc.).

Néanmoins, les formes modales calculées restent cohérentes (nœuds et inflexions aux bonnes altitudes), ce qui confirme la pertinence cinématique du modèle de Ritz pour décrire la flexion globale de la tour.

Mode	f_{mod} (Hz)	f_{mes} (Hz)	erreur	Commentaire
1	0.15	0.15	0%	Bon accord sur la flexion fondamentale
2	0.66	0.43	53.5%	Modèle plus raide
3	1.54	0.78	97.4%	Écart attendu (effets 3D, torsion-flexion ...)

Figure 6 : Comparaison avec les résultats de l'article Bulletin of the Seismological Society of America

III. Modélisation de l'absorbeur passif de vibrations

La tour Taipei 101 est équipée d'un absorbeur passif de vibrations (Tuned Mass Damper, TMD) destiné à réduire les oscillations de la structure sous l'action du vent ou d'un séisme. Cet absorbeur consiste en une masse de 660 tonnes suspendue à proximité du sommet du bâtiment (entre les étages 87 et 92) par un système de câbles et d'amortisseurs visqueux, formant un pendule géant accordé sur la fréquence fondamentale de la tour.

L'objectif du dispositif est d'exploiter le phénomène de résonance contrôlée : lorsque la tour est excitée à sa fréquence propre, l'absorbeur entre en vibration en opposition de phase, ce qui provoque un transfert d'énergie mécanique du bâtiment vers la masse suspendue.

Cette énergie est ensuite dissipée par les amortisseurs, entraînant une réduction significative de l'amplitude de déplacement du sommet de la tour.

Dans le cadre du modèle simplifié de la tour, l'absorbeur est représenté par un système à un degré de liberté constitué d'une masse M_a reliée à la tour par une raideur k_a et un amortissement c_a .

Le TMD de Taipei est une masse très lourde suspendue par câbles (système pendulaire). Le degré de liberté principal d'un pendule est sa rotation/angle dans le plan horizontal, lequel, pour de petites oscillations, se ramène à un déplacement horizontal

$$x_m \approx L\theta$$

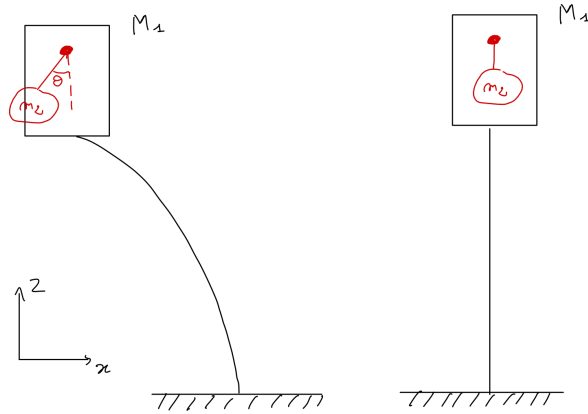


Figure 6 : Déplacement de l'absorbeur sous l'effet d'une impulsion horizontale (ici vers la gauche)

Ainsi le comportement essentiel et l'efficacité du TMD est capturé par un seul ddl horizontal. Les composantes verticales sont négligeables car la longueur du câble impose une raideur verticale élevée (peu de déplacement vertical).

On a donc eu besoin de calculer la raideur équivalente avec la formule suivante:

$$k_a = (2 * \pi * f_1)^2 * M_a$$

IV. Modélisation dynamique simplifié de la flexion transversale de la tour avec l'absorbeur passif

A. Détermination de la matrice Masse

Afin de déterminer la matrice de Masse, on applique la même technique que dans la première partie, on se retrouve donc avec une Énergie cinétique totale du système modifié tel que :

$$Ec_{total} = Ec_{tour} + Ec_{absorbeur}$$

Par linéarité on obtient la matrice de Masse totale tel que:

$$M_{totale} = M_{tour} + M_{absorbeur}$$

avec:

M_{tour} qui devient une matrice 5x5

$M_{absorbeur}$ qui contient la composante de masse sur la 5ème ligne, 5ème colonne.

On obtient la nouvelle matrice $M_{totale} =$

1.0e+06 *

1.5755	-0.4511	-0.4313	1.0757	1.0197
-0.4511	0.1292	0.1235	-0.3080	-0.2920
-0.4313	0.1235	0.1181	-0.2944	-0.2791
1.0757	-0.3080	-0.2944	0.7344	0.6962
1.0197	-0.2920	-0.2791	0.6962	0.6600

B. Détermination de la matrice de Rigidité

On applique la même démarche pour la matrice de rigidité :

$$K_{totale} = K_{tour} + K_{total}$$

et on obtient:

matK_g =

1.0e+10 *

0.0090	0.0205	0.0224	0.0135	0
0.0205	0.2209	0.2865	0.2038	0
0.0224	0.2865	1.4607	1.5487	0
0.0135	0.2038	1.5487	5.7982	0
0	0	0	0	0.0001

C. Calcul des modes propres

On a tracé les modes propres avec les nouvelles contraintes et l'on obtient les valeurs affichées sur la figure suivante:

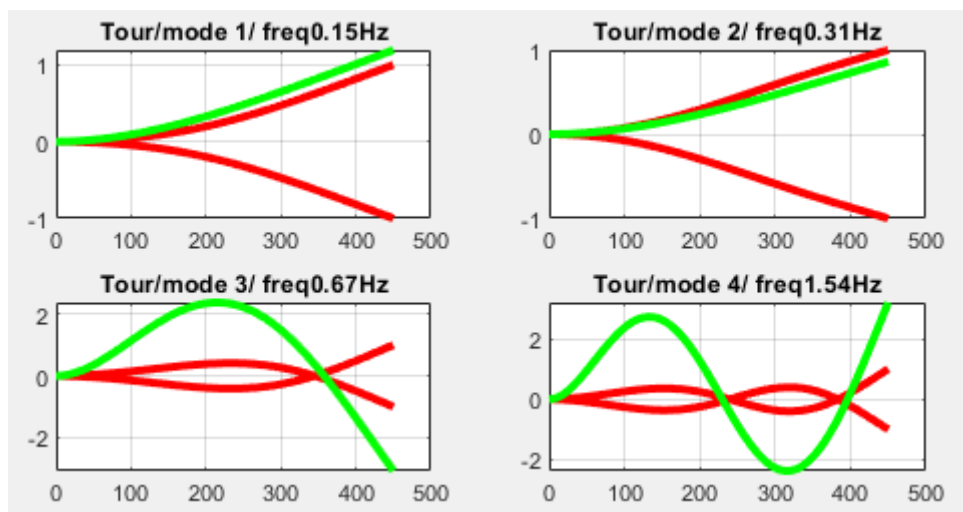


Figure 5 : Déformée modale de la tour avec l'absorbeur

V. Evaluation de l'influence de l'absorbeur

En analysant les valeurs propres obtenues, on constate une modification notable des fréquences propres du système entre les deux configurations étudiées. Initialement, les fréquences étaient de $f_1 = 0,15$ Hz, $f_2 = 0,66$ Hz, $f_3 = 1,54$ Hz et $f_4 = 3,26$ Hz. Après l'ajout du dispositif (ou la modification du modèle), elles deviennent $f_1 = 0,15$ Hz, $f_2 = 0,31$ Hz, $f_3 = 0,67$ Hz et $f_4 = 1,54$ Hz.

On remarque tout d'abord que la première fréquence propre reste pratiquement inchangée : $f_1' \approx f_1 = 0,15$ Hz. Cela signifie que le premier mode correspond toujours au mode fondamental de flexion de la tour, peu influencé par le nouvel élément ajouté.

En revanche, l'apparition d'une nouvelle fréquence $f_2' = 0,31$ Hz traduit la création d'un mode supplémentaire lié à l'interaction dynamique entre la tour et le dispositif ajouté (par exemple un absorbeur ou un ressort). Ce second mode correspond à un mouvement en opposition de phase entre la tour et le système ajouté, typique d'un système couplé à deux degrés de liberté.

Les fréquences suivantes, $f_3' = 0,67$ Hz et $f_4' = 1,54$ Hz, se rapprochent respectivement des anciennes valeurs f_2 et f_3 , ce qui montre que les modes supérieurs de la tour sont peu affectés par le dispositif. Le décalage vers des fréquences plus faibles traduit une légère diminution de la rigidité équivalente du système global, cohérente avec l'ajout d'un élément souple.

Ainsi, cette évolution du spectre modal met en évidence le couplage entre la tour et le nouvel élément, entraînant la scission des fréquences initiales et la création d'un mode supplémentaire à basse fréquence. Le comportement reste cependant cohérent avec la physique du problème : le dispositif modifie principalement les modes de basse fréquence, sans altérer significativement les formes modales supérieures.

Conclusion:

L'analyse modale menée dans cette première partie a permis de déterminer les fréquences propres et les modes de déformation de la tour Taipei 101 à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz. Les résultats obtenus se sont révélés cohérents avec les comportements attendus pour une structure de grande hauteur.

L'ajout de l'absorbeur passif a montré une influence notable sur les caractéristiques vibratoires, traduisant son rôle dans l'amélioration de la stabilité dynamique. Ces éléments constituent une base essentielle pour la suite du projet, qui portera sur la réponse de la tour à différentes sollicitations dynamiques.

Bibliographie

[1] **M. Träsch**, «Caractérisation expérimentale et numérique du comportement hydrodynamique d'une hydrolienne à membrane ondulante,» Archive ouverte HAL, p. 133, 2019.

[2] **Chen, Y. et al. (2023)**. *Dynamic Characteristics of TAIPEI 101 Skyscraper from Rotational and Translation Seismometers*. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 113(2), 690–709.
<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2023BuSSA.113..690C/abstract>.

-Cours d'AM25 "Modélisation numérique – niveau 2", Automne 2025.